

Schémas numériques d'ordre élevé et préservant l'asymptotique



Florian Blachère¹, Christophe Chalons², Rodolphe Turpault³

¹GAMMA3, UTT,

²LMV, UVSQ,

³IMB, Bordeaux-INP

Séminaire IRMA,

08/03/2022





1. CONTEXTE GÉNÉRAL

- Problématique et exemples
- Références et objectifs
- Notations
- Extension à l'ordre élevé

2. SCHÉMA HLL-DLP-AP

- Schéma limite
- Schéma sans terme source
- Résultats sans terme source
- Schéma avec terme source
- Résultats avec terme source

3. SCHÉMA HLL- θ

- Schéma
- Schéma limite
- Résultats avec terme source

4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

1. CONTEXTE GÉNÉRAL

- Problématique et exemples
- Références et objectifs
- Notations
- Extension à l'ordre élevé

2. SCHÉMA HLL-DLP-AP

- Schéma limite
- Schéma sans terme source
- Résultats sans terme source
- Schéma avec terme source
- Résultats avec terme source

3. SCHÉMA HLL- θ

- Schéma
- Schéma limite
- Résultats avec terme source

4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

1. CONTEXTE GÉNÉRAL

- Problématique et exemples
- Références et objectifs
- Notations
- Extension à l'ordre élevé

2. SCHÉMA HLL-DLP-AP

- Schéma limite
- Schéma sans terme source
- Résultats sans terme source
- Schéma avec terme source
- Résultats avec terme source

3. SCHÉMA HLL- θ

- Schéma
- Schéma limite
- Résultats avec terme source

4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Système de lois de conservation avec terme source

$$\partial_t \mathbf{W} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) = \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}) = \mathbf{S}(\mathbf{W}) \quad (1)$$

- $\mathcal{A}$: ensemble des états admissibles,

Système de lois de conservation avec terme source

$$\partial_t \mathbf{W} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) = \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}) = \mathbf{S}(\mathbf{W}) \quad (1)$$

- $\mathcal{A}$: ensemble des états admissibles,
- $\mathbf{W} \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$: variables conservatives,



Système de lois de conservation avec terme source

$$\partial_t \mathbf{W} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) = \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}) = \mathbf{S}(\mathbf{W}) \quad (1)$$

- $\mathcal{A}$: ensemble des états admissibles,
- $\mathbf{W} \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$: variables conservatives,
- $\mathbf{F}$: flux physique,

Système de lois de conservation avec terme source

$$\partial_t \mathbf{W} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) = \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}) = \mathbf{S}(\mathbf{W}) \quad (1)$$

- $\mathcal{A}$: ensemble des états admissibles,
- $\mathbf{W} \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$: variables conservatives,
- $\mathbf{F}$: flux physique,
- $\gamma > 0$: contrôle de la raideur du terme source,

Système de lois de conservation avec terme source

$$\partial_t \mathbf{W} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) = \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}) = \mathbf{S}(\mathbf{W}) \quad (1)$$

- $\mathcal{A}$: ensemble des états admissibles,
- $\mathbf{W} \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$: variables conservatives,
- $\mathbf{F}$: flux physique,
- $\gamma > 0$: contrôle de la raideur du terme source,
- $\mathbf{R}$: fonction continue satisfaisant les conditions de compatibilité de BERTHON, LEFLOCH et TURPAULT [BLT13].

Système de lois de conservation avec terme source

$$\partial_t \mathbf{W} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) = \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}) = \mathbf{S}(\mathbf{W}) \quad (1)$$

- $\mathcal{A}$: ensemble des états admissibles,
- $\mathbf{W} \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$: variables conservatives,
- $\mathbf{F}$: flux physique,
- $\gamma > 0$: contrôle de la raideur du terme source,
- $\mathbf{R}$: fonction continue satisfaisant les conditions de compatibilité de BERTHON, LEFLOCH et TURPAULT [BLT13].

Sous les conditions de compatibilité, (1) dégénère vers une équation de diffusion quand $\gamma t \rightarrow \infty$:

$$\partial_t w - \operatorname{div}(f(w) \nabla w) = 0. \quad (2)$$

- $w \in \mathbb{R}$ lié à $\mathbf{W}$ et $f(w) > 0$.

Modèle d'Euler isentropique avec friction

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = -\kappa \rho \mathbf{u} \end{cases}, \text{ avec } p'(\rho) > 0$$

$$\mathcal{A} = \{(\rho, \rho \mathbf{u})^T \in \mathbb{R}^3 / \rho > 0\}$$

Modèle d'Euler isentropique avec friction

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = -\kappa \rho \mathbf{u} \end{cases}, \text{ avec } p'(\rho) > 0$$

$$\mathcal{A} = \{(\rho, \rho \mathbf{u})^T \in \mathbb{R}^3 / \rho > 0\}$$

Formalisme de (1)

$$\blacksquare \mathbf{W} = (\rho \quad \rho \mathbf{u})^T$$

$$\blacksquare \mathbf{R}(\mathbf{W}) = (\rho \quad 0)^T$$

$$\blacksquare \mathbf{F}(\mathbf{W}) = (\rho \mathbf{u} \quad \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I})^T$$

$$\blacksquare \gamma(\mathbf{W}) = \kappa > 0$$

Modèle d'Euler isentropique avec friction

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = -\kappa \rho \mathbf{u} \end{cases}, \text{ avec } p'(\rho) > 0$$

$$\mathcal{A} = \{(\rho, \rho \mathbf{u})^T \in \mathbb{R}^3 / \rho > 0\}$$

Formalisme de (1)

$$\blacksquare \mathbf{W} = (\rho \quad \rho \mathbf{u})^T$$

$$\blacksquare \mathbf{F}(\mathbf{W}) = (\rho \mathbf{u} \quad \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{I})^T$$

$$\blacksquare \mathbf{R}(\mathbf{W}) = (\rho \quad 0)^T$$

$$\blacksquare \gamma(\mathbf{W}) = \kappa > 0$$

Limite ($\kappa t \rightarrow \infty$) [BLT13 ; HN03 ; HMP05 ; MM90]

$$\partial_t \rho - \operatorname{div} \left(\frac{1}{\kappa} \nabla p(\rho) \right) = 0$$

Modèle M_1 pour le transfert radiatif [DF99]

$$\begin{cases} \partial_t E_R + \operatorname{div}(\mathbf{F}_R) = c\sigma^e aT^4 - c\sigma^a E_R \\ \partial_t \mathbf{F}_R + c^2 \operatorname{div}(\mathbf{P}_R(E_R, \mathbf{F}_R)) = -c\sigma^f \mathbf{F}_R \\ \rho C_v \partial_t T = c\sigma^a E_R - c\sigma^e aT^4 \\ \sigma = \sigma(E_R, \mathbf{F}_R, T) > 0 \\ \mathcal{A} = \{(E_R, \mathbf{F}_R, T)^T \in \mathbb{R}^4 / E_R > 0, T > 0, \|\mathbf{F}_R\| < cE_R\} \end{cases}$$

Modèle M_1 pour le transfert radiatif [DF99]

$$\begin{cases} \partial_t E_R + \operatorname{div}(\mathbf{F}_R) = c\sigma^e aT^4 - c\sigma^a E_R \\ \partial_t \mathbf{F}_R + c^2 \operatorname{div}(\mathbf{P}_R(E_R, \mathbf{F}_R)) = -c\sigma^f \mathbf{F}_R \\ \rho C_v \partial_t T = c\sigma^a E_R - c\sigma^e aT^4 \end{cases}$$

$$\sigma = \sigma(E_R, \mathbf{F}_R, T) > 0$$

$$\mathcal{A} = \{(E_R, \mathbf{F}_R, T)^T \in \mathbb{R}^4 / E_R > 0, T > 0, \|\mathbf{F}_R\| < cE_R\}$$

Formalisme de (1)

$$\blacksquare \mathbf{W} = (E_R \quad \mathbf{F}_R \quad T)^T$$

$$\blacksquare \mathbf{R}(\mathbf{W}) = \dots$$

$$\blacksquare \mathbf{F}(\mathbf{W}) = (\mathbf{F}_R \quad c^2 \mathbf{P}_R \quad 0)^T$$

$$\blacksquare \gamma(\mathbf{W}) = c\sigma^m(\mathbf{W})$$

Modèle M_1 pour le transfert radiatif [DF99]

$$\begin{cases} \partial_t E_R + \operatorname{div}(\mathbf{F}_R) = c\sigma^e aT^4 - c\sigma^a E_R \\ \partial_t \mathbf{F}_R + c^2 \operatorname{div}(\mathbf{P}_R(E_R, \mathbf{F}_R)) = -c\sigma^f \mathbf{F}_R \\ \rho C_v \partial_t T = c\sigma^a E_R - c\sigma^e aT^4 \\ \sigma = \sigma(E_R, \mathbf{F}_R, T) > 0 \\ \mathcal{A} = \{(E_R, \mathbf{F}_R, T)^T \in \mathbb{R}^4 / E_R > 0, T > 0, \|\mathbf{F}_R\| < cE_R\} \end{cases}$$

Formalisme de (1)

$$\begin{aligned} \blacksquare \mathbf{W} &= (E_R \quad \mathbf{F}_R \quad T)^T & \blacksquare \mathbf{F}(\mathbf{W}) &= (\mathbf{F}_R \quad c^2 \mathbf{P}_R \quad 0)^T \\ \blacksquare \mathbf{R}(\mathbf{W}) &= \dots & \blacksquare \gamma(\mathbf{W}) &= c\sigma^m(\mathbf{W}) \end{aligned}$$

Limite ($c\sigma^m t \rightarrow \infty$) : *équation de diffusion à l'équilibre* [Pom73]

$$\partial_t (\rho C_v T + aT^4) - \operatorname{div} \left(\frac{c}{3\sigma^R} \nabla(aT^4) \right) = 0$$

Hydrodynamique radiative

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) & = & 0 \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{P}_R) + \nabla p & = & \frac{1}{c} \sigma^f \mathbf{F}_R \\ \partial_t E + \operatorname{div}((E + p) \mathbf{u}) & = & c (\sigma^a E_R - \sigma^e a T^4) \\ \partial_t E_R + \operatorname{div}(\mathbf{F}_R) & = & c (\sigma^e a T^4 - \sigma^a E_R) \\ \partial_t \mathbf{F}_R + c^2 \operatorname{div}(\mathbf{P}_R) & = & -c \sigma^f \mathbf{F}_R \end{array} \right.$$

$$\mathcal{A} = \{ \mathbf{U} = (\rho, \rho \mathbf{u}, E, E_R, \mathbf{F}_R)^T \in \mathbb{R}^7 / \rho > 0, p > 0, E_R > 0, \|\mathbf{F}_R\| < c E_R \}$$

Formalisme de (1)

$$\blacksquare \mathbf{W} = (\rho \ \rho \mathbf{u} \ E \ E_R \ \mathbf{F}_R)^T$$

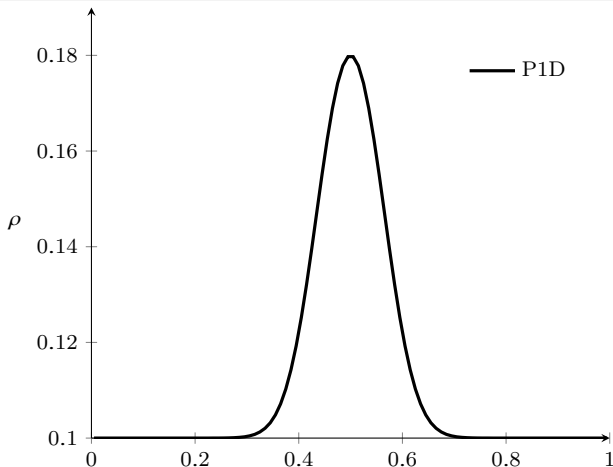
$$\blacksquare \mathbf{R}(\mathbf{W}) = \dots$$

$$\blacksquare \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \dots$$

$$\blacksquare \gamma(\mathbf{W}) = c \sigma^m(\mathbf{W})$$

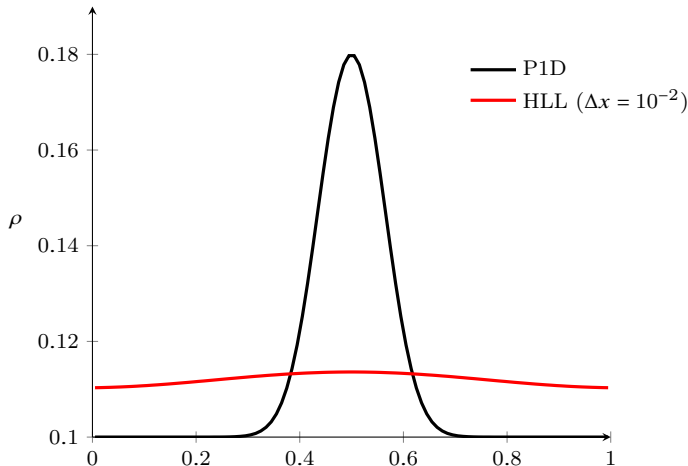
Euler avec friction 1D

$$\rho_0(x) = \frac{1}{10} \left(\exp\left(-\frac{(x-1/2)^2}{0,005}\right) + 1 \right); u_0 = 0; \kappa = 3125; t_f = 3,2; \Delta x = 10^{-2}$$



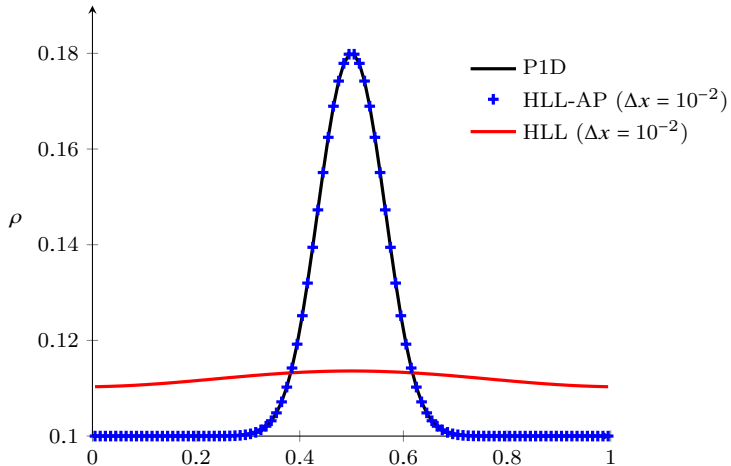
Euler avec friction 1D

$$\rho_0(x) = \frac{1}{10} \left(\exp\left(-\frac{(x-1/2)^2}{0,005}\right) + 1 \right); u_0 = 0; \kappa = 3125; t_f = 3,2; \Delta x = 10^{-2}$$



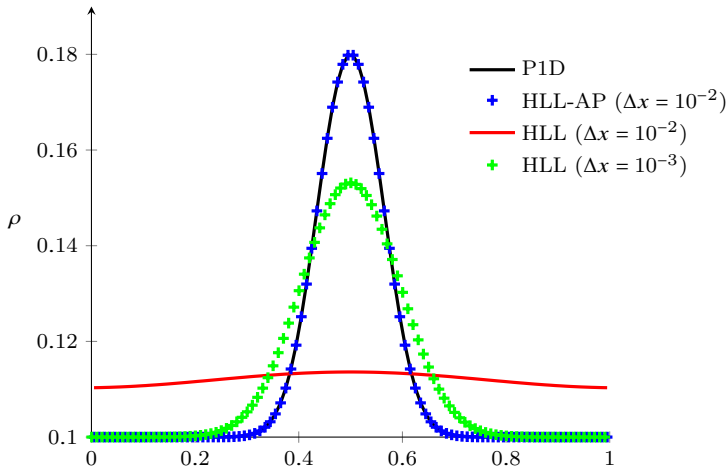
Euler avec friction 1D

$$\rho_0(x) = \frac{1}{10} \left(\exp\left(-\frac{(x-1/2)^2}{0,005}\right) + 1 \right); u_0 = 0; \kappa = 3125; t_f = 3,2; \Delta x = 10^{-2}$$



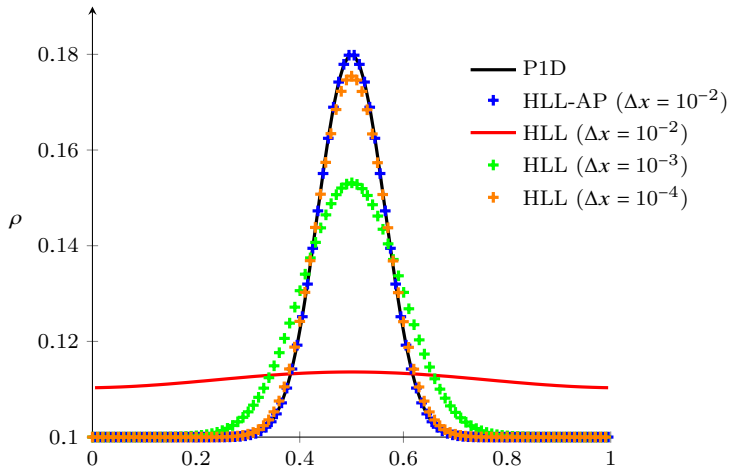
Euler avec friction 1D

$$\rho_0(x) = \frac{1}{10} \left(\exp\left(-\frac{(x-1/2)^2}{0,005}\right) + 1 \right); u_0 = 0; \kappa = 3125; t_f = 3,2; \Delta x = 10^{-2}$$



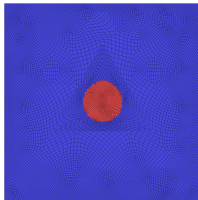
Euler avec friction 1D

$$\rho_0(x) = \frac{1}{10} \left(\exp\left(-\frac{(x-1/2)^2}{0,005}\right) + 1 \right); u_0 = 0; \kappa = 3125; t_f = 3,2; \Delta x = 10^{-2}$$



Euler avec friction 2D

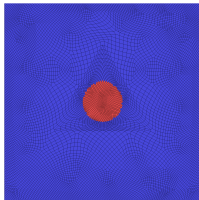
$$\rho_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{x} - \frac{1}{2}\|^2 < 0,1^2 \\ 0,1 & \text{sinon} \end{cases} ; \mathbf{u}_0 = 0 ; \kappa = 2000 ; t_f = 10 ; 9,4 \times 10^3 \text{ cellules}$$



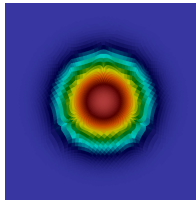
$t = 0$

Euler avec friction 2D

$$\rho_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{x} - \frac{1}{2}\|^2 < 0,1^2 \\ 0,1 & \text{sinon} \end{cases} ; \mathbf{u}_0 = 0 ; \kappa = 2000 ; t_f = 10 ; 9,4 \times 10^3 \text{ cellules}$$



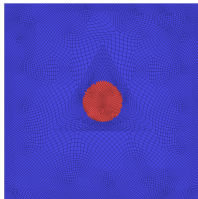
$t = 0$



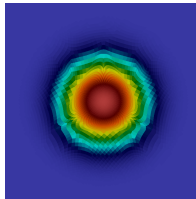
DLP

Euler avec friction 2D

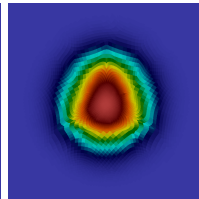
$$\rho_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{x} - \frac{1}{2}\|^2 < 0,1^2 \\ 0,1 & \text{sinon} \end{cases} ; \mathbf{u}_0 = 0 ; \kappa = 2000 ; t_f = 10 ; 9,4 \times 10^3 \text{ cellules}$$



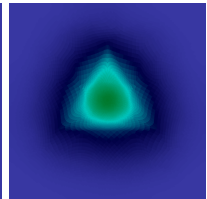
$t = 0$



DLP



HLL-DLP-AP

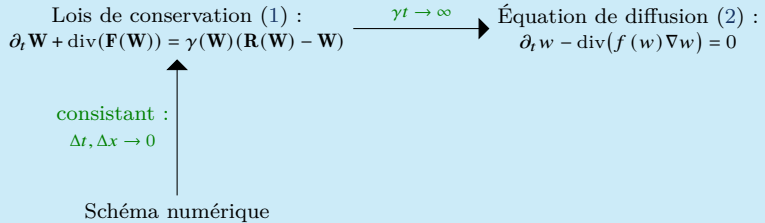


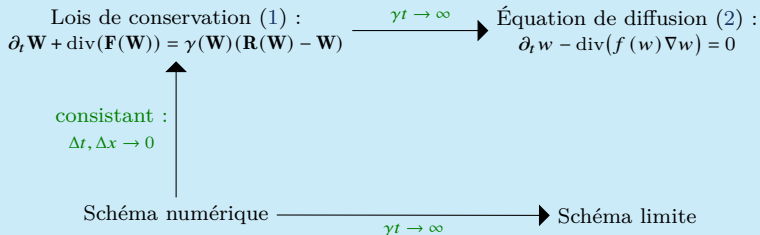
HLL

Lois de conservation (1) :

$$\partial_t \mathbf{W} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) = \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W})$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Lois de conservation (1) :} & \xrightarrow{\gamma t \rightarrow \infty} & \text{Équation de diffusion (2) :} \\ \partial_t \mathbf{W} + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) = \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}) & & \partial_t w - \operatorname{div}(f(w) \nabla w) = 0 \end{array}$$





Lois de conservation (1) :
 $\partial_t \mathbf{W} + \text{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) = \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W})$

consistant :
 $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$

Schéma numérique

$\gamma t \rightarrow \infty$

Équation de diffusion (2) :
 $\partial_t w - \text{div}(f(w) \nabla w) = 0$

consistant ?

$\gamma t \rightarrow \infty$

Schéma limite

1. CONTEXTE GÉNÉRAL

- Problématique et exemples
- **Références et objectifs**
- Notations
- Extension à l'ordre élevé

2. SCHÉMA HLL-DLP-AP

- Schéma limite
- Schéma sans terme source
- Résultats sans terme source
- Schéma avec terme source
- Résultats avec terme source

3. SCHÉMA HLL- θ

- Schéma
- Schéma limite
- Résultats avec terme source

4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Maillage 1D

- cinétique : KLAR [Kla99], LEMOU et MIEUSSENS [LM08], FILBET et JIN [FJ10], DIMARCO et PARESCHI [DP12], LAFITTE et SAMAËY [LS12],
- contrôle de la diffusion numérique :
 - équations du Télégraphe : GOSSE et TOSCANI [GT02],
 - modèle M_1 : BUET et al. [BC07; BD06], BERTHON, CHARRIER et DUBROCA [BCD07], ...
 - Euler avec gravité et friction : CHALONS et al. [CCGRS10],
- avec les idées de la reconstruction hydrostatique pour Euler avec friction : BOUCHUT, OUNAÏSSA et PERTHAME [BOP07],
- IMEX-RK : BOSCARINO et al. [BLR14; BPR13],
- différences finies : AREGBA-DRIOLLET, BRIANI et NATALINI [ABN08; ABN16],
- généralisation de [GT02] par BERTHON et TURPAULT [BT11].
- limitation de la diffusion numérique : CHALONS et TURPAULT [CT19]

Maillage 2D admissible (cartésien, triangulation de Delaunay, ...)

- reprise des techniques du 1D dans chaque direction

Maillage 2D admissible (cartésien, triangulation de Delaunay, ...)

- reprise des techniques du 1D dans chaque direction

Maillage 2D non structuré

- schéma avec flux aux nœuds : BUET, DESPRÉS et FRANCK [BDF12a ; BDF12b ; BDF15 ; BDFL16 ; Fra12],
- avec le schéma diamant (COUDIÈRE, VILA et VILLEDIEU [CVV99]) à la limite : BERTHON, MOEBS, SARAZIN-DESBOIS et TURPAULT [BMST16],
- St-Venant avec friction : DURAN, MARCHE, TURPAULT et BERTHON [DMTB15].

Maillage 2D admissible (cartésien, triangulation de Delaunay, ...)

- reprise des techniques du 1D dans chaque direction

Maillage 2D non structuré

- schéma avec flux aux nœuds : BUET, DESPRÉS et FRANCK [BDF12a ; BDF12b ; BDF15 ; BDFL16 ; Fra12],
- avec le schéma diamant (COUDIÈRE, VILA et VILLEDIEU [CVV99]) à la limite : BERTHON, MOEBS, SARAZIN-DESBOIS et TURPAULT [BMST16],
- St-Venant avec friction : DURAN, MARCHE, TURPAULT et BERTHON [DMTB15].
- avec le schéma de DRONIOU et LE POTIER à la limite : BLACHÈRE et TURPAULT [Bla16 ; BT16 ; BT17]
- limitation de la diffusion numérique : BLACHÈRE, CHALONS et TURPAULT [BCT21]

On souhaite un schéma volumes finis explicite

- pour tout maillage 2D non structuré,
- pour tout système de lois de conservation du formalisme (1),
- sous une condition CFL “hyperbolique” : $\max_{K,i} \left(b_{K,i} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \leq \frac{1}{2}$,
 - stabilité,
 - préservation de $\mathcal{A}$,
 - préservation du comportement asymptotique.



HLL-DLP-AP [BT17]

- 1 choisir un “bon” schéma limite pour (2),
- 2 construire un schéma qui va dégénérer vers ce dernier :
 - avec une diffusion numérique correctement orientée,
 - comme une extension de flux à deux points,
- 3 utiliser des coefficients positifs pour obtenir les propriétés par convexité.

HLL-DLP-AP [BT17]

- 1 choisir un “bon” schéma limite pour (2),
- 2 construire un schéma qui va dégénérer vers ce dernier :
 - avec une diffusion numérique correctement orientée,
 - comme une extension de flux à deux points,
- 3 utiliser des coefficients positifs pour obtenir les propriétés par convexité.

HLL- θ [BCT21]

- 1 utiliser un schéma classique,
- 2 limiter sa diffusion numérique,
- 3 étudier son comportement à la limite.

1. CONTEXTE GÉNÉRAL

- Problématique et exemples
- Références et objectifs
- **Notations**
- Extension à l'ordre élevé

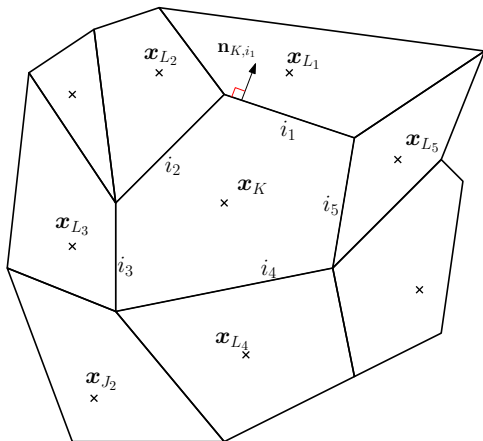
2. SCHÉMA HLL-DLP-AP

- Schéma limite
- Schéma sans terme source
- Résultats sans terme source
- Schéma avec terme source
- Résultats avec terme source

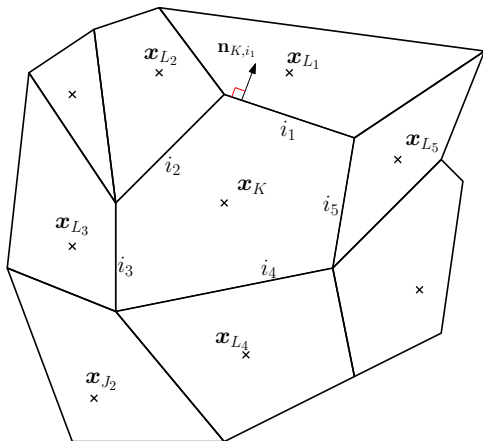
3. SCHÉMA HLL- θ

- Schéma
- Schéma limite
- Résultats avec terme source

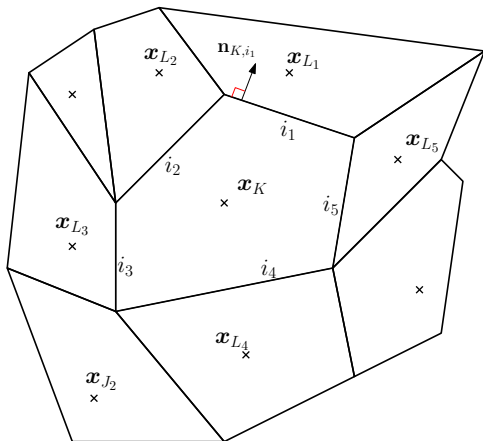
4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES



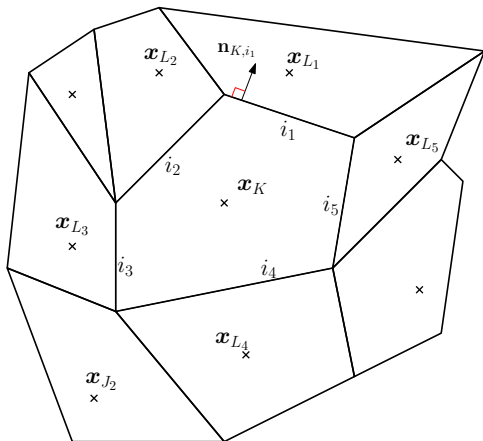
- $\mathcal{M}$: maillage constitué de cellules polygonales K ,



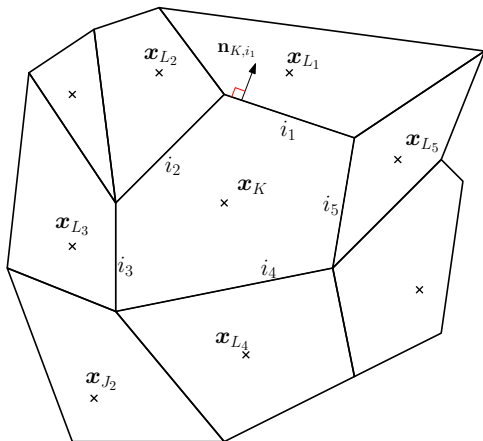
- $\mathcal{M}$: maillage constitué de cellules polygonales K ,
- $\mathbf{x}_K$: centre de la cellule K ,



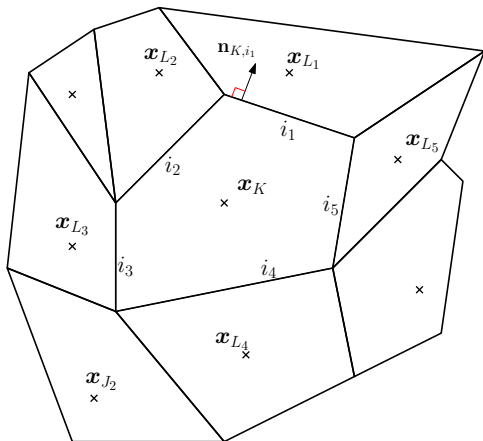
- $\mathcal{M}$: maillage constitué de cellules polygonales K ,
- $\mathbf{x}_K$: centre de la cellule K ,
- L : voisin de la cellule K par l'interface i ,



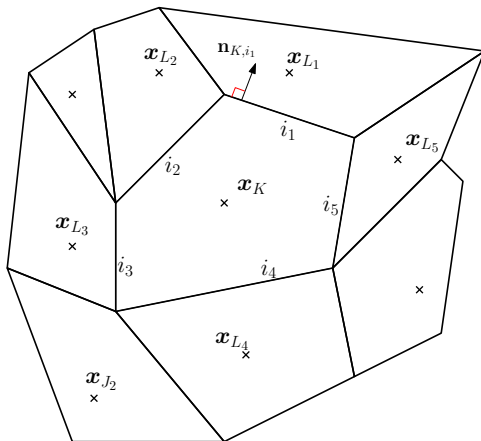
- $\mathcal{M}$: maillage constitué de cellules polygonales K ,
- $\mathbf{x}_K$: centre de la cellule K ,
- L : voisin de la cellule K par l'interface i ,
- $\mathcal{E}_K$: ensemble des interfaces ou voisins de K ,



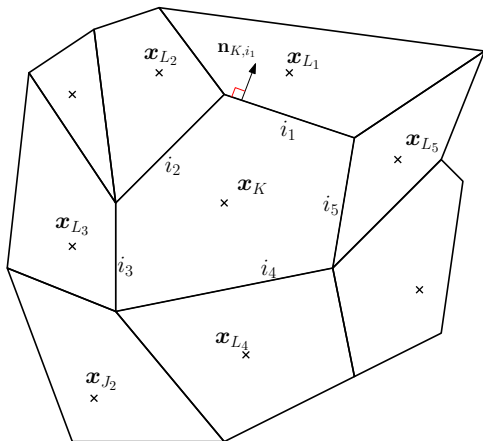
- $\mathcal{M}$: maillage constitué de cellules polygonales K ,
- $\mathbf{x}_K$: centre de la cellule K ,
- L : voisin de la cellule K par l'interface i ,
- $\mathcal{E}_K$: ensemble des interfaces ou voisins de K ,
- $|e_i|$: longueur de l'interface i ,



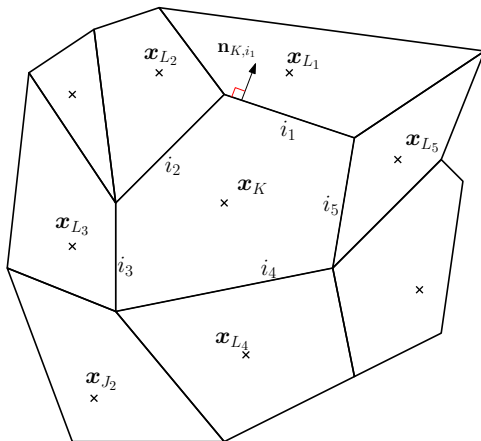
- $\mathcal{M}$: maillage constitué de cellules polygonales K ,
- $\mathbf{x}_K$: centre de la cellule K ,
- L : voisin de la cellule K par l'interface i ,
- $\mathcal{E}_K$: ensemble des interfaces ou voisins de K ,
- $|e_i|$: longueur de l'interface i ,
- $|K|$: aire de la cellule K ,



- $\mathcal{M}$: maillage constitué de cellules polygonales K ,
- $\mathbf{x}_K$: centre de la cellule K ,
- L : voisin de la cellule K par l'interface i ,
- $\mathcal{E}_K$: ensemble des interfaces ou voisins de K ,
- $|e_i|$: longueur de l'interface i ,
- $|K|$: aire de la cellule K ,
- $\Delta x_K := \frac{|K|}{p_K}$: pas d'espace,



- $\mathcal{M}$: maillage constitué de cellules polygonales K ,
- $\mathbf{x}_K$: centre de la cellule K ,
- L : voisin de la cellule K par l'interface i ,
- $\mathcal{E}_K$: ensemble des interfaces ou voisins de K ,
- $|e_i|$: longueur de l'interface i ,
- $|K|$: aire de la cellule K ,
- $\Delta x_K := \frac{|K|}{p_K}$: pas d'espace,
- $\mathbf{n}_{K,i}$: normale à l'interface i sortante de K ,



- $\mathcal{M}$: maillage constitué de cellules polygonales K ,
- $\mathbf{x}_K$: centre de la cellule K ,
- L : voisin de la cellule K par l'interface i ,
- $\mathcal{E}_K$: ensemble des interfaces ou voisins de K ,
- $|e_i|$: longueur de l'interface i ,
- $|K|$: aire de la cellule K ,
- $\Delta x_K := \frac{|K|}{p_K}$: pas d'espace,
- $\mathbf{n}_{K,i}$: normale à l'interface i sortante de K ,
- b_{KL} : plus grande vitesse d'onde entre les états $\mathbf{W}_K$ et $\mathbf{W}_L$.

1. CONTEXTE GÉNÉRAL

- Problématique et exemples
- Références et objectifs
- Notations
- Extension à l'ordre élevé

2. SCHÉMA HLL-DLP-AP

- Schéma limite
- Schéma sans terme source
- Résultats sans terme source
- Schéma avec terme source
- Résultats avec terme source

3. SCHÉMA HLL- θ

- Schéma
- Schéma limite
- Résultats avec terme source

4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES



Reconstruction polynomiale

$$\mathbf{w}_K^{n+1} = \mathbf{w}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \mathcal{F}_{K,i}(\mathbf{w}_K^n, \mathbf{w}_L^n) \cdot \mathbf{n}_{K,i}$$

Reconstruction polynomiale

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \mathcal{F}_{K,i}(\mathbf{W}_K^n, \mathbf{W}_L^n) \cdot \mathbf{n}_{K,i}$$

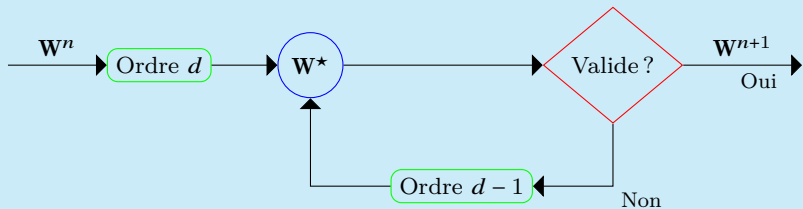
$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{r=1}^R \xi_r \mathcal{F}_{K,i}(\tilde{\mathbf{W}}_K^n(\mathbf{x}_r), \tilde{\mathbf{W}}_L^n(\mathbf{x}_r)) \cdot \mathbf{n}_{K,i}$$

Reconstruction polynomiale

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \mathcal{F}_{K,i}(\mathbf{W}_K^n, \mathbf{W}_L^n) \cdot \mathbf{n}_{K,i}$$

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{r=1}^R \xi_r \mathcal{F}_{K,i}(\tilde{\mathbf{W}}_K^n(x_r), \tilde{\mathbf{W}}_L^n(x_r)) \cdot \mathbf{n}_{K,i}$$

Limitation *a posteriori*



1. CONTEXTE GÉNÉRAL

- Problématique et exemples
- Références et objectifs
- Notations
- Extension à l'ordre élevé

2. SCHÉMA HLL-DLP-AP

- Schéma limite
- Schéma sans terme source
- Résultats sans terme source
- Schéma avec terme source
- Résultats avec terme source

3. SCHÉMA HLL- θ

- Schéma
- Schéma limite
- Résultats avec terme source

4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

1. CONTEXTE GÉNÉRAL

- Problématique et exemples
- Références et objectifs
- Notations
- Extension à l'ordre élevé

2. SCHÉMA HLL-DLP-AP

- Schéma limite
- Schéma sans terme source
- Résultats sans terme source
- Schéma avec terme source
- Résultats avec terme source

3. SCHÉMA HLL- θ

- Schéma
- Schéma limite
- Résultats avec terme source

4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES



Schéma volumes finis explicite pour les équations de diffusion

$$\partial_t w - \operatorname{div}(f(w) \nabla w) = 0 \quad (2)$$

Schéma volumes finis explicite pour les équations de diffusion

$$\partial_t w - \operatorname{div}(f(w) \nabla w) = 0 \quad (2)$$

Choix : schéma développé par DRONIOU et LE POTIER [DL11]

- conservatif et consistant avec l'équation de diffusion sur tout maillage,
- respecte le principe du maximum discret et préserve $\mathcal{A}$,

Schéma volumes finis explicite pour les équations de diffusion

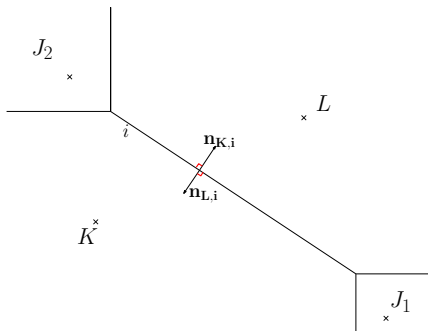
$$\partial_t w - \operatorname{div}(f(w) \nabla w) = 0 \quad (2)$$

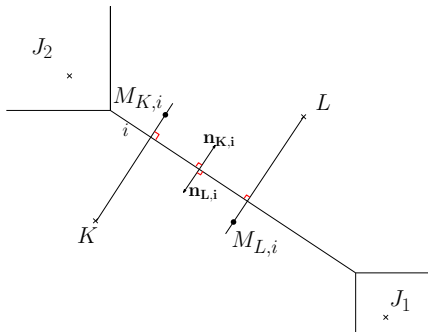
Choix : schéma développé par DRONIOU et LE POTIER [DL11]

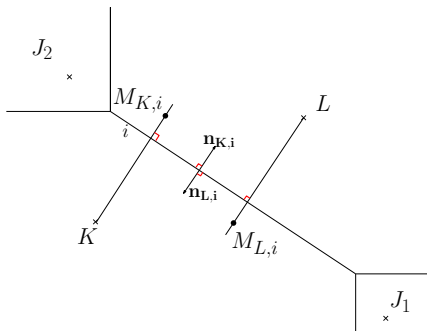
- conservatif et consistant avec l'équation de diffusion sur tout maillage,
- respecte le principe du maximum discret et préserve $\mathcal{A}$,
- **non linéaire** :

$$(f(w_K) \nabla_i w_K) \cdot \mathbf{n}_{K,i} \simeq \sum_{J \in S_{K,i}} \bar{v}_{K,i}^J(w) (w_J - w_K),$$

- $S_{K,i}$: l'ensemble des points utilisés pour la reconstruction sur l'interface i de la cellule K ,
- $\bar{v}_{K,i}^J(w) \geq 0$.



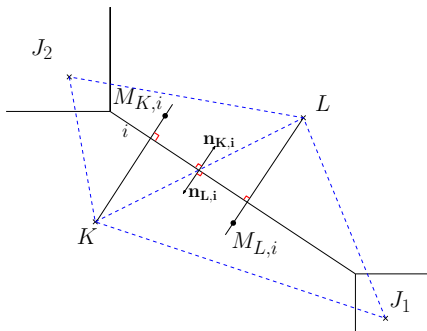




Deux reconstructions

$$\nabla_i w_K \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \frac{w_{M_{K,i}} - w_K}{|KM_{K,i}|}$$

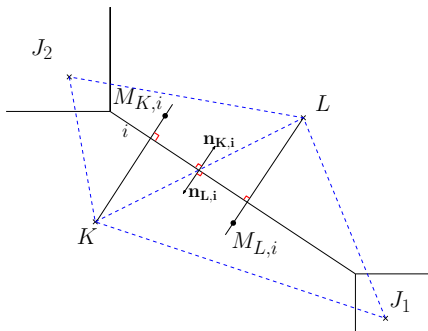
$$\nabla_i w_L \cdot \mathbf{n}_{L,i} = \frac{w_{M_{L,i}} - w_L}{|LM_{L,i}|}$$



Deux reconstructions

$$\nabla_i w_K \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \frac{w_{M_{K,i}} - w_K}{|KM_{K,i}|}$$

$$\nabla_i w_L \cdot \mathbf{n}_{L,i} = \frac{w_{M_{L,i}} - w_L}{|LM_{L,i}|}$$



Deux reconstructions

$$\nabla_i w_K \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \frac{w_{M_{K,i}} - w_K}{|KM_{K,i}|}$$

$$\nabla_i w_L \cdot \mathbf{n}_{L,i} = \frac{w_{M_{L,i}} - w_L}{|LM_{L,i}|}$$

Combinaison convexe : $\theta_{K,i} + \theta_{L,i} = 1$, $\theta_{K,i} \geq 0$, $\theta_{L,i} \geq 0$

$$\begin{aligned} \nabla_i w_K \cdot \mathbf{n}_{K,i} &= \theta_{K,i}(w) \nabla_i w_K \cdot \mathbf{n}_{K,i} + \theta_{L,i}(w) \nabla_i w_L \cdot \mathbf{n}_{K,i} \\ &= \sum_{J \in S_{K,i}} \bar{v}_{K,i}^J(w) (w_J - w_K), \text{ avec } \bar{v}_{K,i}^J(w) \geq 0. \end{aligned}$$

1. CONTEXTE GÉNÉRAL

- Problématique et exemples
- Références et objectifs
- Notations
- Extension à l'ordre élevé

2. SCHÉMA HLL-DLP-AP

- Schéma limite
- **Schéma sans terme source**
- Résultats sans terme source
- Schéma avec terme source
- Résultats avec terme source

3. SCHÉMA HLL- θ

- Schéma
- Schéma limite
- Résultats avec terme source

4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \mathcal{F}_i(\mathbf{W}_K, \mathbf{W}_L, \dots) \cdot \mathbf{n}_{K,i} \quad (3)$$

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \mathcal{F}_i(\mathbf{W}_K, \mathbf{W}_L, \dots) \cdot \mathbf{n}_{K,i} \quad (3)$$

Théorème 1 (BLACHÈRE et TURPAULT [BT16])

On suppose que le flux $\mathcal{F}_i$ est conservatif et que les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (H1) *Consistance* : si $\mathbf{W}_K^n \equiv \mathbf{W}$ alors $\mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \mathbf{F}(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n}_{K,i}$,
- (H2) *Reconstruction* : $\exists v_{K,i}^J \geq 0$, $\mathcal{F}_i \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in S_{K,i}} v_{K,i}^J \mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}$,
- (H3) *Formule de la divergence discrète* : $\sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in S_{K,i}} v_{K,i}^J \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} = 0$.

Alors, le schéma (3) est stable et préserve $\mathcal{A}$ sous la condition CFL suivante :

$$\max_{\substack{K \in \mathcal{M} \\ J \in \bar{\mathcal{E}}_K}} \left(b_{KJ} \frac{\Delta t}{\delta_{KJ}} \right) \leq \frac{1}{2}. \quad (4)$$



1 flux HLL :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_i(\mathbf{W}_K, \mathbf{W}_L) \cdot \mathbf{n}_{K,i} &= \frac{\mathbf{F}(\mathbf{W}_K) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_L)}{2} \cdot \mathbf{n}_{K,i} - \frac{b_{KL}}{2} (\mathbf{W}_L - \mathbf{W}_K) \\ &= \mathcal{F}_{KL} \cdot \mathbf{n}_{K,i}\end{aligned}$$



1 flux HLL :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_i(\mathbf{W}_K, \mathbf{W}_L) \cdot \mathbf{n}_{K,i} &= \frac{\mathbf{F}(\mathbf{W}_K) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_L)}{2} \cdot \mathbf{n}_{K,i} - \frac{b_{KL}}{2} (\mathbf{W}_L - \mathbf{W}_K) \\ &= \mathcal{F}_{KL} \cdot \mathbf{n}_{K,i}\end{aligned}$$

2 flux HLL-DLP :

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} v_{K,i}^J(\mathbf{W}) \mathcal{F}_{KJ} \cdot \eta_{KJ}$$

1 flux HLL :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_i(\mathbf{W}_K, \mathbf{W}_L) \cdot \mathbf{n}_{K,i} &= \frac{\mathbf{F}(\mathbf{W}_K) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_L)}{2} \cdot \mathbf{n}_{K,i} - \frac{b_{KL}}{2} (\mathbf{W}_L - \mathbf{W}_K) \\ &= \mathcal{F}_{KL} \cdot \mathbf{n}_{K,i}\end{aligned}$$

2 flux HLL-DLP :

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} v_{K,i}^J(\mathbf{W}) \mathcal{F}_{KJ} \cdot \eta_{KJ}$$

Mais ...

1 flux HLL :

- satisfait les hypothèses du théorème,
- sa diffusion numérique est orientée selon KL .

1 flux HLL :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_i(\mathbf{W}_K, \mathbf{W}_L) \cdot \mathbf{n}_{K,i} &= \frac{\mathbf{F}(\mathbf{W}_K) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_L)}{2} \cdot \mathbf{n}_{K,i} - \frac{b_{KL}}{2} (\mathbf{W}_L - \mathbf{W}_K) \\ &= \mathcal{F}_{KL} \cdot \mathbf{n}_{K,i}\end{aligned}$$

2 flux HLL-DLP :

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} v_{K,i}^J(\mathbf{W}) \mathcal{F}_{KJ} \cdot \eta_{KJ}$$

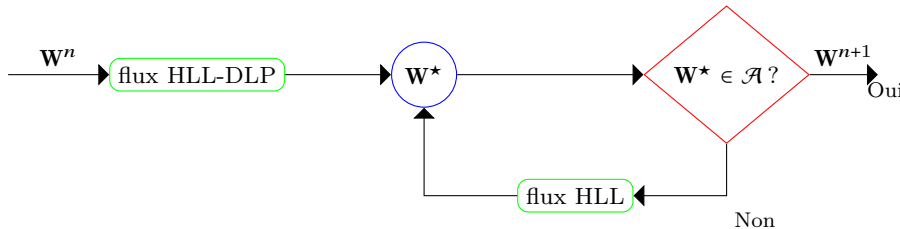
Mais ...

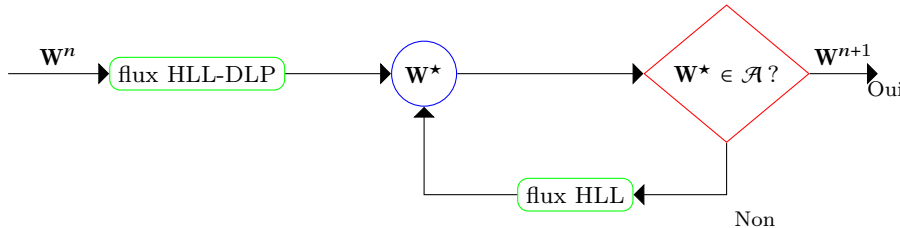
1 flux HLL :

- satisfait les hypothèses du théorème,
- sa diffusion numérique est orientée selon KL .

2 flux HLL-DLP :

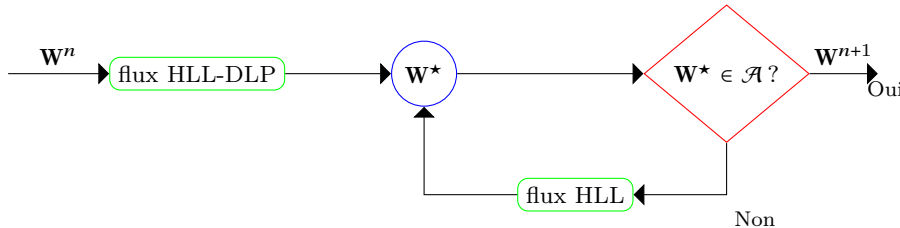
- ne respecte pas l'hypothèse (H3),
- possède une diffusion numérique bien orientée.





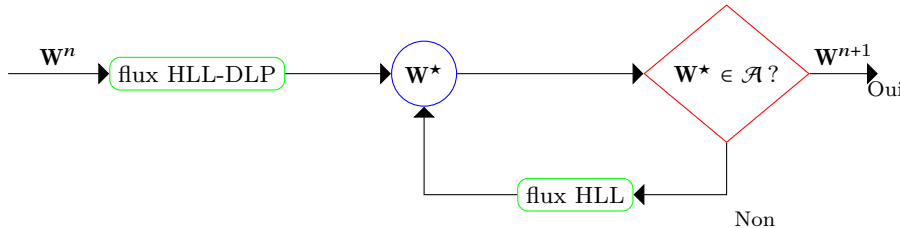
Limitation *a posteriori* inspirée de MOOD [CDL11]

- 1 $W^\star$ est calculé avec le flux HLL-DLP et la condition CFL (4),



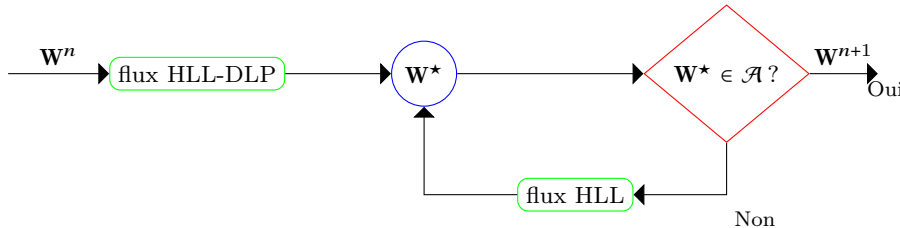
Limitation *a posteriori* inspirée de MOOD [CDL11]

- 1 $W^\star$ est calculé avec le flux HLL-DLP et la condition CFL (4),
- 2 Critère d'admissibilité physique (*Physical Admissibility Detection*) :



Limitation *a posteriori* inspirée de MOOD [CDL11]

- 1 $W^\star$ est calculé avec le flux HLL-DLP et la condition CFL (4),
- 2 Critère d'admissibilité physique (*Physical Admissibility Detection*) :
 - si $W^\star \in \mathcal{A}$ alors les itérations continuent,



Limitation *a posteriori* inspirée de MOOD [CDL11]

- 1 $W^\star$ est calculé avec le flux HLL-DLP et la condition CFL (4),
- 2 Critère d'admissibilité physique (*Physical Admissibility Detection*) :
 - si $W^\star \in \mathcal{A}$ alors les itérations continuent,
 - sinon, l'hypothèse (H3) est vérifiée en utilisant le flux HLL sur les cellules non admissibles.

1. CONTEXTE GÉNÉRAL

- Problématique et exemples
- Références et objectifs
- Notations
- Extension à l'ordre élevé

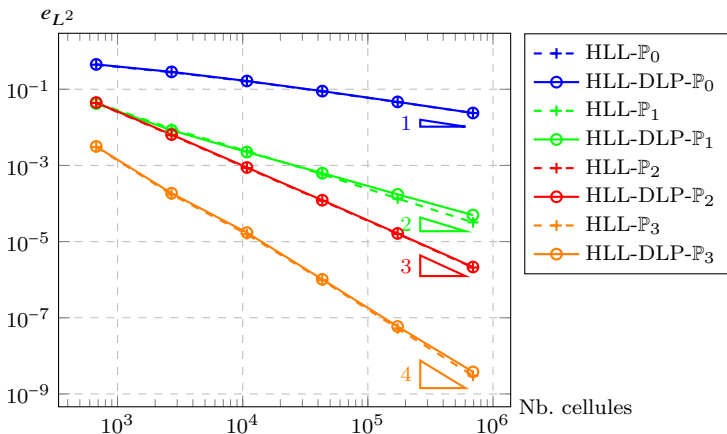
2. SCHÉMA HLL-DLP-AP

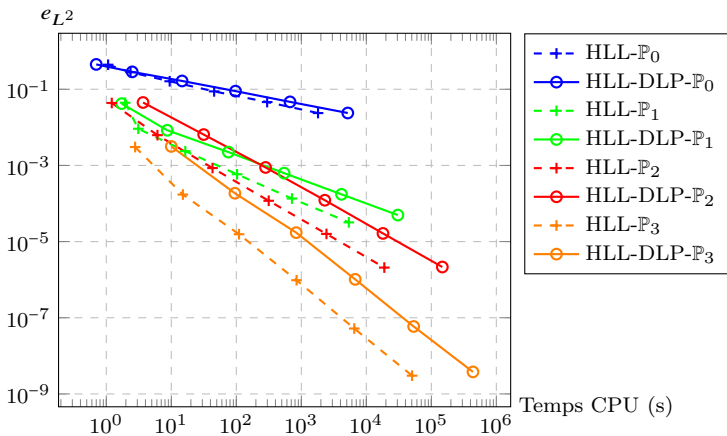
- Schéma limite
- Schéma sans terme source
- Résultats sans terme source
- Schéma avec terme source
- Résultats avec terme source

3. SCHÉMA HLL- θ

- Schéma
- Schéma limite
- Résultats avec terme source

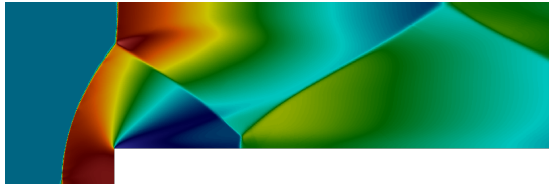
4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES







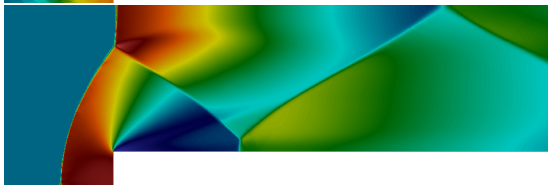
HLL-DLP : $1,7 \times 10^6$ cellules,
correction HLL < 1%



HLL : $1,7 \times 10^3$ cellules

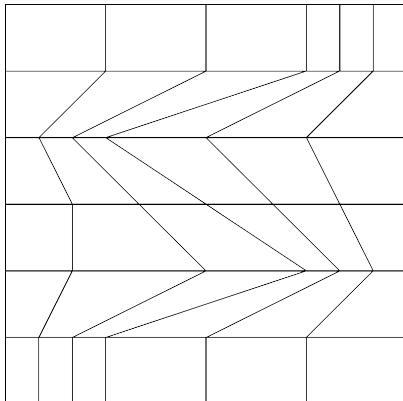


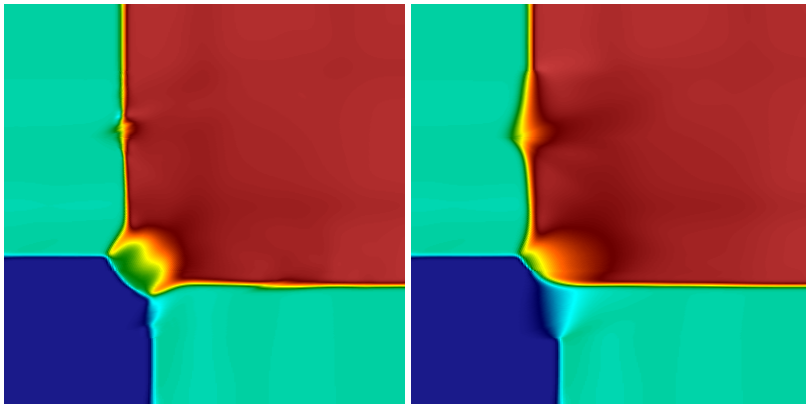
HLL-DLP : $1,7 \times 10^6$ cellules,
correction HLL < 1%



HLL-DLP : $1,7 \times 10^3$ cellules

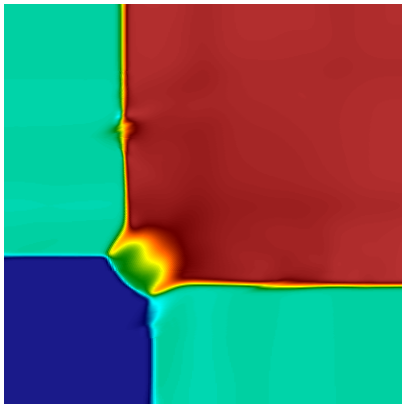




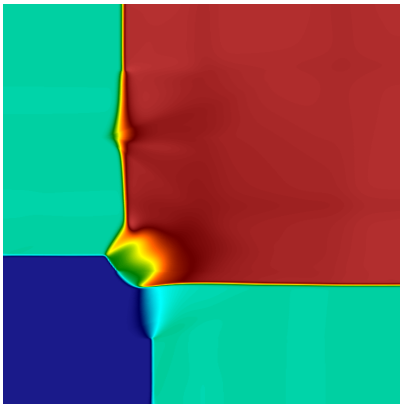


HLL-DLP : $1,5 \times 10^5$ cellules,
correction HLL $< 1\%$

HLL : $1,5 \times 10^5$ cellules



HLL-DLP : $1,5 \times 10^5$ cellules,
correction HLL < 1%



HLL : $6,0 \times 10^5$ cellules



1. CONTEXTE GÉNÉRAL

- Problématique et exemples
- Références et objectifs
- Notations
- Extension à l'ordre élevé

2. SCHÉMA HLL-DLP-AP

- Schéma limite
- Schéma sans terme source
- Résultats sans terme source
- **Schéma avec terme source**
- Résultats avec terme source

3. SCHÉMA HLL- θ

- Schéma
- Schéma limite
- Résultats avec terme source

4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES



$$\mathbf{w}_K^{n+1} = \mathbf{w}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \bar{\mathcal{F}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} \quad (5)$$

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \bar{\mathcal{F}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} \quad (5)$$

Construction de $\bar{\mathcal{F}}_{K,i}$ avec la technique de [BT11]

$$\bar{\mathcal{F}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in S_{K,i}} \nu_{K,i}^J \bar{\mathcal{F}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ}$$

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \bar{\mathcal{F}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} \quad (5)$$

Construction de $\bar{\mathcal{F}}_{K,i}$ avec la technique de [BT11]

$$\bar{\mathcal{F}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in S_{K,i}} \nu_{K,i}^J \bar{\mathcal{F}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \quad \alpha_{KJ} = \frac{b_{KJ}}{b_{KJ} + \gamma_K \delta_{KJ}} \in [0; 1]$$

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \bar{\mathcal{F}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} \quad (5)$$

Construction de $\bar{\mathcal{F}}_{K,i}$ avec la technique de [BT11]

$$\bar{\mathcal{F}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \bar{\mathcal{F}}_{KJ} \cdot \eta_{KJ} \quad \alpha_{KJ} = \frac{b_{KJ}}{b_{KJ} + \gamma_K \delta_{KJ}} \in [0; 1]$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{F}}_{KJ} \cdot \eta_{KJ} = & \alpha_{KJ} \mathcal{F}_{KJ} \cdot \eta_{KJ} - (\alpha_{KJ} - \alpha_{KK}) \mathbf{F}(\mathbf{W}_K^n) \cdot \eta_{KJ} \\ & - (1 - \alpha_{KJ}) b_{KJ} (\mathbf{R}(\mathbf{W}_K^n) - \mathbf{W}_K^n) \end{aligned}$$

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \bar{\mathcal{F}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} \quad (5)$$

Construction de $\bar{\mathcal{F}}_{K,i}$ avec la technique de [BT11]

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{F}}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} &= \sum_{J \in \mathcal{S}_{K,i}} \nu_{K,i}^J \bar{\mathcal{F}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} & \alpha_{KJ} &= \frac{b_{KJ}}{b_{KJ} + \gamma_K \delta_{KJ}} \in [0; 1] \\ \bar{\mathcal{F}}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} &= \alpha_{KJ} \mathcal{F}_{KJ} \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} - (\alpha_{KJ} - \alpha_{KK}) \mathbf{F}(\mathbf{W}_K^n) \cdot \boldsymbol{\eta}_{KJ} \\ &\quad - (1 - \alpha_{KJ}) b_{KJ} (\mathbf{R}(\mathbf{W}_K^n) - \mathbf{W}_K^n) \end{aligned}$$

Théorème 2 (BLACHÈRE et TURPAULT [BT16])

Le schéma (5) est consistant avec le système de lois de conservation (1), sous des conditions techniques sur ν . De plus, il préserve l'ensemble des états admissibles $\mathcal{A}$ sous la condition CFL :

$$\max_{\substack{K \in \mathcal{M} \\ J \in \bar{\mathcal{E}}_K}} \left(b_{KJ} \frac{\Delta t}{\delta_{KJ}} \right) \leq \frac{1}{2}. \quad (4)$$

- Le schéma avec terme source est-il AP ?

- Le schéma avec terme source est-il AP ?
 - **généralement non** : la diffusion numérique est bien orientée mais le coefficient doit être ajusté.

- Le schéma avec terme source est-il AP ?

→ **généralement non** : la diffusion numérique est bien orientée mais le coefficient doit être ajusté.

Formulation équivalente

$$\partial_t \mathbf{W} + \text{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) = \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}), \quad (1)$$

$$= \gamma(\mathbf{W})(\mathbf{R}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}) + (\bar{\gamma} - \gamma)\mathbf{W},$$

$$\partial_t \mathbf{W} + \text{div}(\mathbf{F}(\mathbf{W})) = (\gamma(\mathbf{W}) + \bar{\gamma})(\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{W}) - \mathbf{W}), \quad (6)$$

avec $\gamma(\mathbf{W}) + \bar{\gamma} > 0$ et $\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{W}) := \frac{\gamma \mathbf{R}(\mathbf{W}) + \bar{\gamma} \mathbf{W}}{\gamma + \bar{\gamma}}.$



Limite du schéma HLL-DLP-AP

$$\rho_K^{n+1} = \rho_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in S_{K,i}} v_{K,i}^{J,\rho} \frac{b_{KJ}^2}{2(\kappa_K + \bar{\kappa}_{K,i}^J) \delta_{KJ}} (\rho_J^n - \rho_K^n)$$



Limite du schéma HLL-DLP-AP

$$\rho_K^{n+1} = \rho_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in S_{K,i}} v_{K,i}^{J,\rho} \frac{b_{KJ}^2}{2(\kappa_K + \bar{\kappa}_{K,i}^J) \delta_{KJ}} (\rho_J^n - \rho_K^n)$$

Schéma DLP

$$\begin{aligned} \rho_K^{n+1} &= \rho_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in S_{K,i}} \frac{\bar{v}_{K,i}^J}{\kappa_K} (p_J^n - p_K^n) \\ &\longrightarrow \partial_t \rho - \operatorname{div} \left(\frac{1}{\kappa} \nabla p(\rho) \right) = 0 \end{aligned}$$



Limite du schéma HLL-DLP-AP

$$\rho_K^{n+1} = \rho_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in S_{K,i}} v_{K,i}^{J,\rho} \frac{b_{KJ}^2}{2(\kappa_K + \bar{\kappa}_{K,i}^J) \delta_{KJ}} (\rho_J^n - \rho_K^n)$$

Correction asymptotique $\bar{\kappa}$

$$\frac{v_{K,i}^J b_{KJ}^2}{2(\kappa_K + \bar{\kappa}_{K,i}^J) \delta_{KJ}} (\rho_J^n - \rho_K^n) = \frac{\bar{v}_{K,i}^J}{\kappa} (p_J^n - p_K^n)$$

Schéma DLP

$$\begin{aligned} \rho_K^{n+1} &= \rho_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \sum_{J \in S_{K,i}} \frac{\bar{v}_{K,i}^J}{\kappa_K} (p_J^n - p_K^n) \\ &\longrightarrow \partial_t \rho - \operatorname{div} \left(\frac{1}{\kappa} \nabla p(\rho) \right) = 0 \end{aligned}$$

1. CONTEXTE GÉNÉRAL

- Problématique et exemples
- Références et objectifs
- Notations
- Extension à l'ordre élevé

2. SCHÉMA HLL-DLP-AP

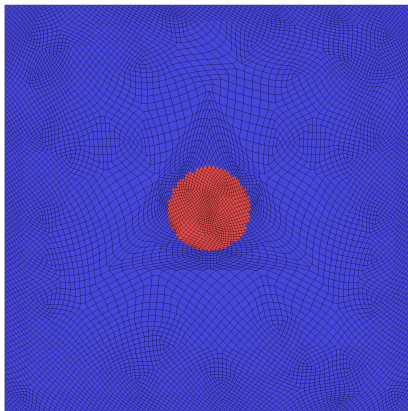
- Schéma limite
- Schéma sans terme source
- Résultats sans terme source
- Schéma avec terme source
- Résultats avec terme source

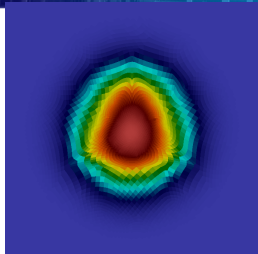
3. SCHÉMA HLL- θ

- Schéma
- Schéma limite
- Résultats avec terme source

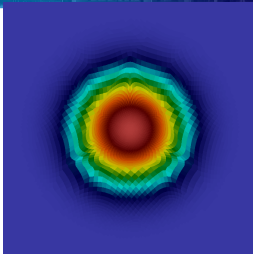
4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

$$\rho_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{x} - \frac{1}{2}\|^2 < 0,1^2 \\ 0,1 & \text{sinon} \end{cases}; \mathbf{u} = 0; \kappa = 2000; t_f = 10; 9,4 \times 10^3 \text{ cellules}$$

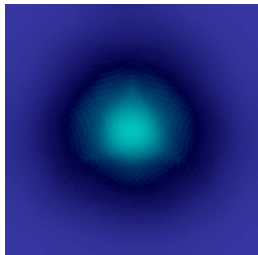




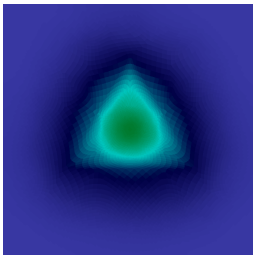
HLL-DLP-AP



DLP



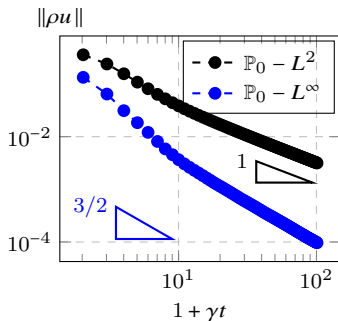
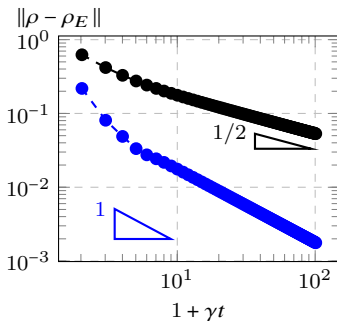
HLL-DLP-NoAP



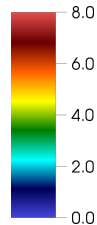
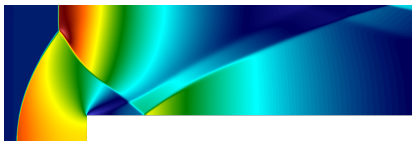
HLL

$$\rho_0(x, y) = \exp\left(-(x - 50)^2 - (y - 50)^2\right) + 1; \mathbf{u}_0(x, y) = 0.$$

$[0; 100]^2$; $2.6 \cdot 10^4$ triangles; $\Delta x = 9.05 \cdot 10^{-2}$; $t_f = 10^2$; $\kappa = 1$.

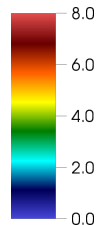
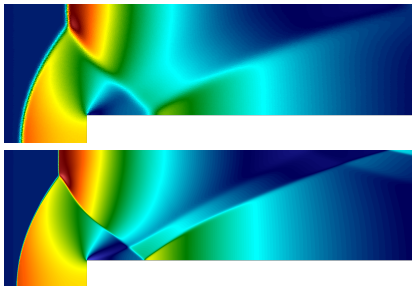


HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_0$ sur
 1×10^6 cellules

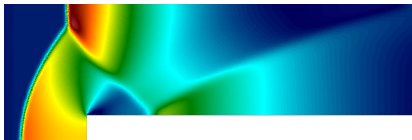


HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_0$ sur
 4×10^4 cellules

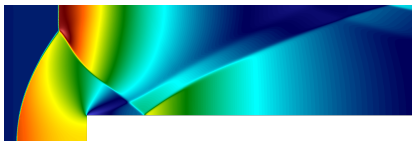
HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_0$ sur
 1×10^6 cellules



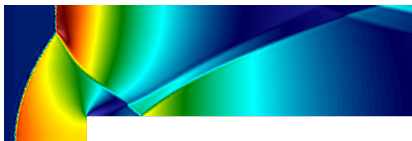
HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_0$ sur
 4×10^4 cellules



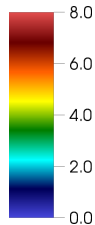
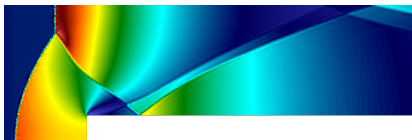
HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_0$ sur
 1×10^6 cellules



HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_1$ sur
 4×10^4 cellules



HLL-DLP-AP- $\mathbb{P}_3$ sur
 4×10^4 cellules



1. CONTEXTE GÉNÉRAL

- Problématique et exemples
- Références et objectifs
- Notations
- Extension à l'ordre élevé

2. SCHÉMA HLL-DLP-AP

- Schéma limite
- Schéma sans terme source
- Résultats sans terme source
- Schéma avec terme source
- Résultats avec terme source

3. SCHÉMA HLL- θ

- Schéma
- Schéma limite
- Résultats avec terme source

4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

1. CONTEXTE GÉNÉRAL

- Problématique et exemples
- Références et objectifs
- Notations
- Extension à l'ordre élevé

2. SCHÉMA HLL-DLP-AP

- Schéma limite
- Schéma sans terme source
- Résultats sans terme source
- Schéma avec terme source
- Résultats avec terme source

3. SCHÉMA HLL- θ

- Schéma
- Schéma limite
- Résultats avec terme source

4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES



Schéma HLL classique avec terme source centré

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \mathcal{F}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} + \Delta t \mathbf{S}_K^n$$

Schéma HLL classique avec terme source centré

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \mathcal{F}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} + \Delta t \mathbf{S}_K^n$$

Flux

- flux HLL :

$$\mathcal{F}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{W}_K) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_L)}{2} \cdot \mathbf{n}_{K,i} - \frac{b_{KL}}{2} (\mathbf{W}_L - \mathbf{W}_K)$$

Schéma HLL classique avec terme source centré

$$\mathbf{W}_K^{n+1} = \mathbf{W}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \mathcal{F}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} + \Delta t \mathbf{S}_K^n$$

Flux

- flux HLL :

$$\mathcal{F}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{W}_K) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_L)}{2} \cdot \mathbf{n}_{K,i} - \frac{b_{KL}}{2} (\mathbf{W}_L - \mathbf{W}_K)$$

- flux HLL- θ :

$$\mathcal{F}_{K,i} \cdot \mathbf{n}_{K,i} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{W}_K) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_L)}{2} \cdot \mathbf{n}_{K,i} - \frac{b_{KL}}{2} \theta_i (\mathbf{W}_L - \mathbf{W}_K)$$

avec :

$$\theta_i = \left(\frac{1}{1+\gamma_i t} \quad 1 \quad 1 \right) \in [0; 1]$$

Théorème 3 (CHALONS et TURPAULT [CT19])

Dans le cas linéaire 1D (équations du Télégraphe) avec γ constant, le schéma HLL- θ est L^2 -stable sous la condition CFL suivante :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{4b + \gamma \Delta x}$$

Théorème 3 (CHALONS et TURPAULT [CT19])

Dans le cas linéaire 1D (équations du Télégraphe) avec γ constant, le schéma HLL- θ est L^2 -stable sous la condition CFL suivante :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{4b + \gamma \Delta x}$$

- l'extension 2D se fait par combinaison convexe de schéma 1D,
- on utilise la stabilité démontrée en linéaire pour le non linéaire...

1. CONTEXTE GÉNÉRAL

- Problématique et exemples
- Références et objectifs
- Notations
- Extension à l'ordre élevé

2. SCHÉMA HLL-DLP-AP

- Schéma limite
- Schéma sans terme source
- Résultats sans terme source
- Schéma avec terme source
- Résultats avec terme source

3. SCHÉMA HLL- θ

- Schéma
- **Schéma limite**
- Résultats avec terme source

4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Schéma limite

$$\rho_K^{n+1} = \rho_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} \frac{|e_i|}{\kappa} \left[\frac{1}{2} (\nabla_h p)_K + \frac{1}{2} (\nabla_h p)_L \right] \cdot \mathbf{n}_{K,i},$$

avec :

$$(\nabla_h p)_K = \frac{1}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \left(\frac{p_K^n + p_L^n}{2} \right) \mathbf{n}_{K,i}.$$

$$\longrightarrow \partial_t \rho - \operatorname{div} \left(\frac{1}{\kappa} \nabla p(\rho) \right) = 0$$

Schéma limite

$$\rho_K^{n+1} = \rho_K^n + \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} \frac{|e_i|}{\kappa} \left[\frac{1}{2} (\nabla_h p)_K + \frac{1}{2} (\nabla_h p)_L \right] \cdot \mathbf{n}_{K,i},$$

avec :

$$(\nabla_h p)_K = \frac{1}{|K|} \sum_{i \in \mathcal{E}_K} |e_i| \left(\frac{p_K^n + p_L^n}{2} \right) \mathbf{n}_{K,i}.$$

$$\longrightarrow \partial_t \rho - \operatorname{div} \left(\frac{1}{\kappa} \nabla p(\rho) \right) = 0$$

- schéma non commun avec un stencil élargi, en 1D :

$$\frac{\rho_{i+2} - 2\rho_i + \rho_{i-2}}{\Delta x^2}.$$

1. CONTEXTE GÉNÉRAL

- Problématique et exemples
- Références et objectifs
- Notations
- Extension à l'ordre élevé

2. SCHÉMA HLL-DLP-AP

- Schéma limite
- Schéma sans terme source
- Résultats sans terme source
- Schéma avec terme source
- Résultats avec terme source

3. SCHÉMA HLL- θ

- Schéma
- Schéma limite
- Résultats avec terme source

4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES



Solution manufacturée

$$\rho(x, y, t) = \exp(-(x + y)),$$

$$(\rho u)(x, y, t) = (\rho v)(x, y, t) = \frac{\exp(-t)}{k},$$

$$p(x, y, t) = \rho(x, y, t)^\gamma,$$

Solution manufacturée

$$\rho(x, y, t) = \exp(-(x + y)),$$

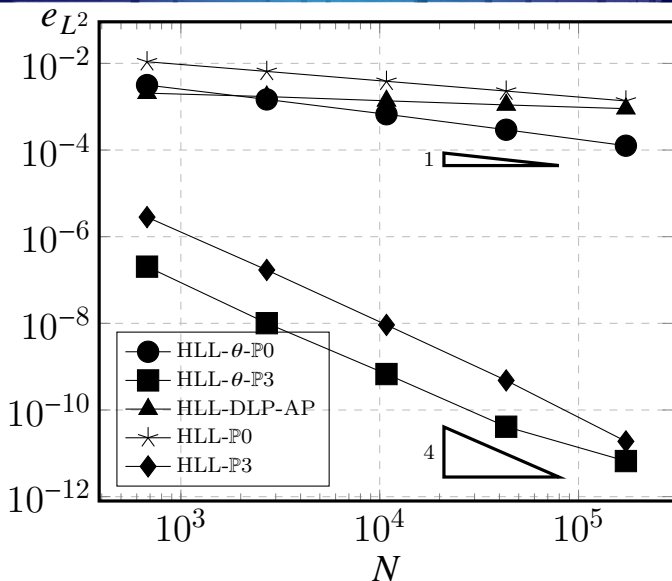
$$(\rho u)(x, y, t) = (\rho v)(x, y, t) = \frac{\exp(-t)}{k},$$

$$p(x, y, t) = \rho(x, y, t)^\gamma,$$

avec :

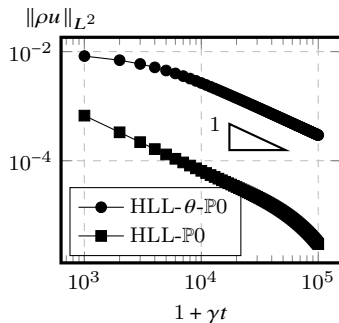
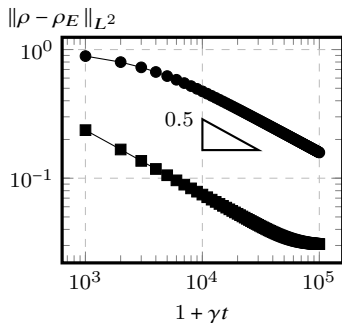
$$\kappa(x, y, t) = \frac{-1}{(\rho u)} \left[\partial_t(\rho u) + \partial_x p - 2 \frac{(\rho u)^2 \partial_x(\rho)}{\rho^2} \right].$$

$$k = 640 \Rightarrow \kappa \in [64; 2600]$$



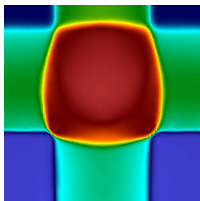
$$\rho_0(x, y) = \exp\left(-(x - 50)^2 - (y - 50)^2\right) + 1; \mathbf{u}_0(x, y) = 0.$$

$[0; 100]^2$; $6.6 \cdot 10^3$ triangles; $\Delta x = 1.7 \cdot 10^{-1}$; $t_f = 10^3$; $\kappa = 10^2$.

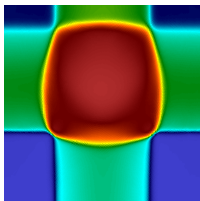


$$\kappa(U) = 5\left(\frac{\rho}{5}\right)^3; \begin{cases} \rho_0 = 5, & \mathbf{u}_0 = 0 & \text{si } (x - 0.5)^2 + (y - 0.4)^4 \leq 0.3^2 \\ \rho_0 = 1, & \mathbf{u}_0 = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

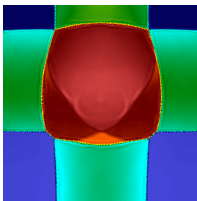
$4 \cdot 10^4$ triangles; $\Delta x = 8 \cdot 10^{-4}$; $\rho \in [1; 3.5]$.



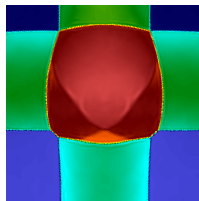
HLL- θ -P0, 1h,
 $n = 2.2 \cdot 10^4$,
 $\Delta t = 4.5 \cdot 10^{-5}$



HLL-DLP-AP-P0, 2h,
 $n = 5 \cdot 10^3$,
 $\Delta t = 10^{-4}$



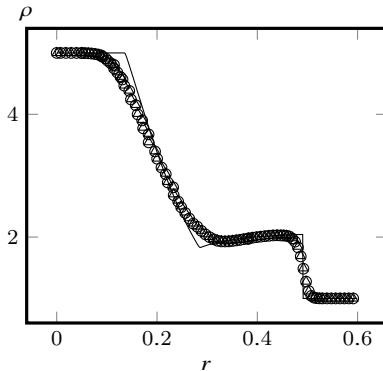
HLL- θ -P3, 10h



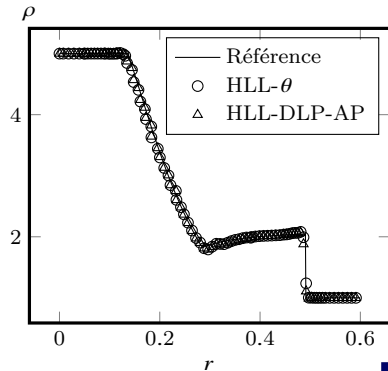
HLL-DLP-AP-P3, 30h

Comparaison avec une solution de référence obtenue par symétrie

cylindrique [Tor09] sur la ligne $(0.5, 0.4) - (0.5, 1.0)$: $S_g(U) = \frac{-1}{r} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}$; $t_f = 0.1$

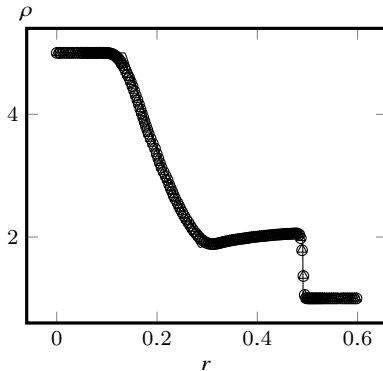


P0, $2.2 \cdot 10^4$ triangles, 1h

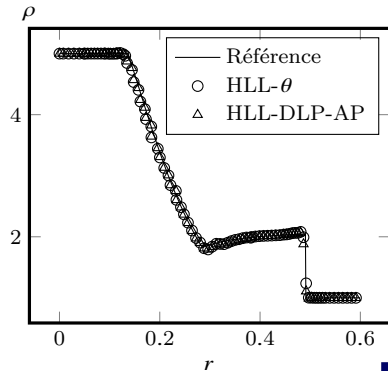


P3, $2.2 \cdot 10^4$ triangles, 10h

Comparaison avec une solution de référence obtenue par symétrie cylindrique [Tor09] sur la ligne $(0.5, 0.4) - (0.5, 1.0)$: $S_g(U) = \frac{-1}{r} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}$; $t_f = 0.1$



P0, $2.7 \cdot 10^6$ triangles, 70h



P3, $2.2 \cdot 10^4$ triangles, 10h

1. CONTEXTE GÉNÉRAL

- Problématique et exemples
- Références et objectifs
- Notations
- Extension à l'ordre élevé

2. SCHÉMA HLL-DLP-AP

- Schéma limite
- Schéma sans terme source
- Résultats sans terme source
- Schéma avec terme source
- Résultats avec terme source

3. SCHÉMA HLL- θ

- Schéma
- Schéma limite
- Résultats avec terme source

4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

HLL-DLP-AP

- choix du schéma limite
- condition CFL de l'hyperbolique

- ordre élevé en hyperbolique
- coefficients ν non linéaires
- correction a posteriori

HLL- θ

- schéma limite non standard
- condition CFL du linéaire et plus restrictive

- ordre élevé dans tous les régimes
- coefficients $\theta(\gamma, t)$
- mise en place « simple »

Conclusion

- théorie générale pour des systèmes hyperboliques avec un comportement asymptotique,
- schémas d'ordre élevé qui préservent l'ensemble des états admissibles $\mathcal{A}$ et la limite de diffusion,
- codes de calcul parallèles et multi-physique pour (1) et (2) en 1D et 2D.

Conclusion

- théorie générale pour des systèmes hyperboliques avec un comportement asymptotique,
- schémas d'ordre élevé qui préservent l'ensemble des états admissibles $\mathcal{A}$ et la limite de diffusion,
- codes de calcul parallèles et multi-physique pour (1) et (2) en 1D et 2D.

Perspectives

- étendre le schéma limite pour prendre en compte des systèmes de diffusion ou des équations de diffusion plus complexes,
- obtenir un schéma qui vérifie toutes les hypothèses du théorème afin de s'affranchir de la correction avec le flux à deux points,
- preuve de la condition CFL du schéma HLL- θ ,
- tester le schéma limite du HLL- θ .



Merci de votre attention.





Merci de votre attention.

Opération
Postes

[Accueil](#)

[Outils Pratiques](#)

[Concours MCF/PR](#)

[Concours CR/DR](#)

[Concours EC/ECC](#)

[Autres emplois](#)

[Archives](#)

[APRES](#)

Bienvenue sur le site de l'Opération Postes, session 2021-2022

Idée naturelle : MOOD CLAIN, DIOT et LOUBÈRE [CDL11 ; Dio12]

- reconstruction polynomiale $\widetilde{\mathbf{W}}_K(\mathbf{x})$,
- limitation *a posteriori* comme pour la correction avec le flux HLL.

Idée naturelle : MOOD CLAIN, DIOT et LOUBÈRE [CDL11 ; Dio12]

- reconstruction polynomiale $\widetilde{\mathbf{W}}_K(\mathbf{x})$,
- limitation *a posteriori* comme pour la correction avec le flux HLL.

Mais :

- la reconstruction polynomiale doit être faite par interface pour la limite : CLAIN, MACHADO, NÓBREGA et PEREIRA [CMNP13],

Idée naturelle : MOOD CLAIN, DIOT et LOUBÈRE [CDL11 ; Dio12]

- reconstruction polynomiale $\widetilde{\mathbf{W}}_K(\mathbf{x})$,
- limitation *a posteriori* comme pour la correction avec le flux HLL.

Mais :

- la reconstruction polynomiale doit être faite par interface pour la limite : CLAIN, MACHADO, NÓBREGA et PEREIRA [CMNP13],
- les coefficients α de BERTHON et TURPAULT [BT11] limitent le schéma à l'ordre un.



Idee naturelle : MOOD CLAIN, DIOT et LOUBÈRE [CDL11 ; Dio12]

- reconstruction polynomiale $\widetilde{\mathbf{W}}_K(\mathbf{x})$,
- limitation *a posteriori* comme pour la correction avec le flux HLL.

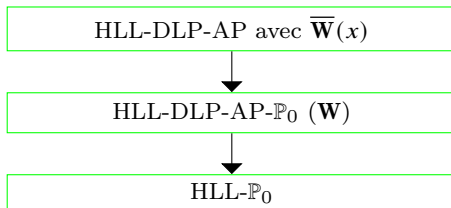
Mais :

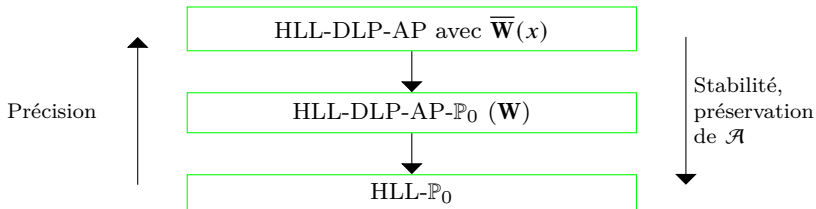
- la reconstruction polynomiale doit être faire par interface pour la limite : CLAIN, MACHADO, NÓBREGA et PEREIRA [CMNP13],
- les coefficients α de BERTHON et TURPAULT [BT11] limitent le schéma à l'ordre un.

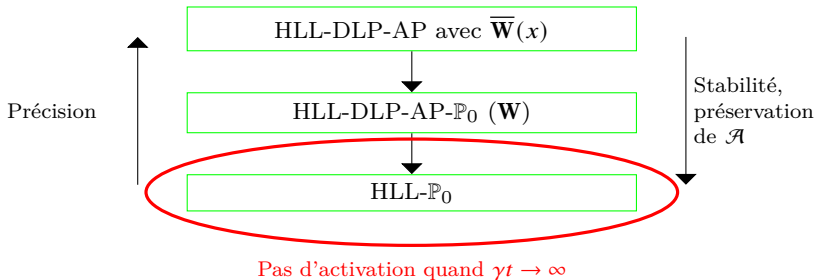
Nouvelle combinaison convexe :

$$\overline{\mathbf{W}}_K(\mathbf{x}) = \beta_K \widetilde{\mathbf{W}}_K(\mathbf{x}) + (1 - \beta_K) \mathbf{W}_K$$

$$\beta_K = \frac{\Delta_l}{\Delta_l + \gamma_K t \Delta x_K} \in [0; 1]$$







- [ABN08] D. Aregba-Driollet, M. Biani, and R. Natalini, Asymptotic high-order schemes for 2×2 dissipative hyperbolic systems, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 46, no. 2, pp. 869–894, 2008.
- [ABN16] D. Aregba-Driollet, M. Biani, and R. Natalini, Time asymptotic high order schemes for dissipative BGK hyperbolic systems, *Numer. Math.*, vol. 132, no. 2, pp. 399–431, 2016.
- [BCD07] C. Berthon, P. Charrier, and B. Dubroca, An HLLC scheme to solve the M_1 model of radiative transfer in two space dimensions, *J. Sci. Comput.*, vol. 31, no. 3, pp. 347–389, 2007.
- [BLT13] C. Berthon, P. G. LeFloch, and R. Turpault, Late-time/stiff-relaxation asymptotic-preserving approximations of hyperbolic equations, *Math. Comp.*, vol. 82, no. 282, pp. 831–860, 2013.
- [BMST16] C. Berthon, G. Moebs, C. Sarazin-Desbois, and R. Turpault, An asymptotic-preserving scheme for systems of conservation laws with source terms on 2D unstructured meshes, *Commun. Appl. Math. Comput. Sci.*, vol. 11, no. 1, pp. 55–77, 2016.

- [BT11] C. Berthon and R. Turpault, Asymptotic preserving HLL schemes, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, vol. 27, no. 6, pp. 1396–1422, 2011.
- [BHN07] S. Bianchini, B. Hanouzet, and R. Natalini, Asymptotic behavior of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 60, no. 11, pp. 1559–1622, 2007.
- [Bla16] F. Blachère, High-order asymptotic-preserving numerical scheme for radiation hydrodynamics, Ph.D. dissertation, Université Nantes ; Université Bretagne Loire, Sep. 2016.
- [BT16] F. Blachère and R. Turpault, An admissibility and asymptotic-preserving scheme for systems of conservation laws with source term on 2D unstructured meshes, *J. Comput. Phys.*, vol. 315, pp. 98–123, 2016.
- [BT17] F. Blachère and R. Turpault, An admissibility and asymptotic preserving scheme for systems of conservation laws with source term on 2D unstructured meshes with high-order MOOD reconstruction, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 317, pp. 836–867, 2017.

- [BCT21] F. Blachère, C. Chalons, and R. Turpault, Very high-order asymptotic-preserving schemes for hyperbolic systems of conservation laws with parabolic degeneracy on unstructured meshes, English, *Comput. Math. Appl.*, vol. 87, pp. 41–49, 2021.
- [BLR14] S. Boscarino, P. G. LeFloch, and G. Russo, High-order asymptotic-preserving methods for fully nonlinear relaxation problems, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 36, no. 2, A377–A395, 2014.
- [BPR13] S. Boscarino, L. Pareschi, and G. Russo, Implicit-explicit Runge-Kutta schemes for hyperbolic systems and kinetic equations in the diffusion limit, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 35, no. 1, A22–A51, 2013.
- [BOP07] F. Bouchut, H. Ounaissa, and B. Perthame, Upwinding of the source term at interfaces for euler equations with high friction, *Comput. Math. Appl.*, vol. 53, no. 3-4, pp. 361–375, 2007.
- [BC07] C. Buet and S. Cordier, An asymptotic preserving scheme for hydrodynamics radiative transfer models: numerics for radiative transfer, *Numer. Math.*, vol. 108, no. 2, pp. 199–221, 2007.
- [BD06] C. Buet and B. Després, Asymptotic preserving and positive schemes for radiation hydrodynamics, *J. Comput. Phys.*, vol. 215, no. 2, pp. 717–740, 2006.

- [BDF12a] C. Buet, B. Després, and E. Franck, An asymptotic preserving scheme with the maximum principle for the M_1 model on distorted meshes, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 350, no. 11-12, pp. 633–638, 2012.
- [BDF12b] C. Buet, B. Després, and E. Franck, Design of asymptotic preserving finite volume schemes for the hyperbolic heat equation on unstructured meshes, *Numer. Math.*, vol. 122, no. 2, pp. 227–278, 2012.
- [BDF15] C. Buet, B. Després, and E. Franck, Asymptotic preserving schemes on distorted meshes for Friedrichs systems with stiff relaxation: application to angular models in linear transport, *J. Sci. Comput.*, vol. 62, no. 2, pp. 371–398, 2015.
- [BDL16] C. Buet, B. Després, E. Franck, and T. Leroy, Proof of uniform convergence for a cell-centered AP discretization of the hyperbolic heat equation on general meshes, *Mathematics of Computation*, 2016.

- [CCGRS10] C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, P.-A. Raviart, and N. Seguin, Godunov-type schemes for hyperbolic systems with parameter-dependent source. The case of Euler system with friction, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, vol. 20, no. 11, pp. 2109–2166, 2010.
- [CT19] C. Chalons and R. Turpault, High-order asymptotic-preserving schemes for linear systems: application to the Goldstein-Taylor equations, English, *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, vol. 35, no. 4, pp. 1538–1561, 2019.
- [CDL11] S. Clain, S. Diot, and R. Loubère, A high-order finite volume method for systems of conservation laws—Multi-dimensional Optimal Order Detection (MOOD), *J. Comput. Phys.*, vol. 230, no. 10, pp. 4028–4050, 2011.
- [CMNP13] S. Clain, G. J. Machado, J. M. Nóbrega, and R. M. S. Pereira, A sixth-order finite volume method for multidomain convection-diffusion problem with discontinuous coefficients, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 267, pp. 43–64, 2013.

- [CVV99] Y. Coudière, J.-P. Vila, and P. Villedieu, Convergence rate of a finite volume scheme for a two-dimensional convection-diffusion problem, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, vol. 33, no. 3, pp. 493–516, 1999.
- [DP12] G. Dimarco and L. Pareschi, High order asymptotic-preserving schemes for the Boltzmann equation, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 350, no. 9-10, pp. 481–486, 2012.
- [Dio12] S. Diot, La méthode MOOD Multi-dimensional Optimal Order Detection: la première approche a posteriori aux méthodes volumes finis d'ordre très élevé, Ph.D. dissertation, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, Aug. 2012.
- [DL11] J. Droniou and C. Le Potier, Construction and convergence study of schemes preserving the elliptic local maximum principle, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 49, no. 2, pp. 459–490, 2011.
- [DF99] B. Dubroca and J. Feugeas, Theoretical and numerical study of a moment closure hierarchy for the radiative transfer equation, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, vol. 329, no. 10, pp. 915–920, 1999.

- [DMTB15] A. Duran, F. Marche, R. Turpault, and C. Berthon, Asymptotic preserving scheme for the shallow water equations with source terms on unstructured meshes, *J. Comput. Phys.*, vol. 287, pp. 184–206, 2015.
- [FJ10] F. Filbet and S. Jin, A class of asymptotic-preserving schemes for kinetic equations and related problems with stiff sources, *J. Comput. Phys.*, vol. 229, no. 20, pp. 7625–7648, 2010.
- [Fra12] E. Franck, Design and numerical analysis of asymptotic preserving schemes on unstructured meshes. Application to the linear transport and Friedrichs systems, Ph.D. dissertation, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, Oct. 2012.
- [GT02] L. Gosse and G. Toscani, An asymptotic-preserving well-balanced scheme for the hyperbolic heat equations, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 334, no. 4, pp. 337–342, 2002.
- [HN03] B. Hanouzet and R. Natalini, Global existence of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol. 169, no. 2, pp. 89–117, 2003.
- [HMP05] F. Huang, P. Marcati, and R. Pan, Convergence to the Barenblatt solution for the compressible Euler equations with damping and vacuum, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol. 176, no. 1, pp. 1–24, 2005.

- [Jin99] S. Jin, Efficient asymptotic-preserving (AP) schemes for some multiscale kinetic equations, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 21, no. 2, 441–454 (electronic), 1999.
- [Kla99] A. Klar, An asymptotic preserving numerical scheme for kinetic equations in the low Mach number limit, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 36, no. 5, 1507–1527 (electronic), 1999.
- [KT02] A. Kurganov and E. Tadmor, Solution of two-dimensional Riemann problems for gas dynamics without Riemann problem solvers, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, vol. 18, no. 5, pp. 584–608, 2002.
- [LS12] P. Lafitte and G. Samaey, Asymptotic-preserving projective integration schemes for kinetic equations in the diffusion limit, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 34, no. 2, A579–A602, 2012.
- [LM08] M. Lemou and L. Mieussens, A new asymptotic preserving scheme based on micro-macro formulation for linear kinetic equations in the diffusion limit, *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 31, no. 1, pp. 334–368, 2008.
- [MM90] P. Marcati and A. Milani, The one-dimensional Darcy’s law as the limit of a compressible Euler flow, *J. Differential Equations*, vol. 84, no. 1, pp. 129–147, 1990.

- [Pom73] G. Pomraning, *The equations of radiation hydrodynamics*, ser. International series of monographs in natural philosophy. 1973.
- [Tor09] E. F. Toro, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Third. 2009, pp. xxiv+724, A practical introduction.
- [WC84] P. Woodward and P. Colella, The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks, *J. Comput. Phys.*, vol. 54, no. 1, pp. 115–173, 1984.